

Was ist eine Wahrscheinlichkeit?

- Ereignis mit verschiedenen Möglichkeiten
- "Klassisches Verhältnis": z.B. Würfel zu $\frac{1}{6}$ auf 1
bedeutet: Bei unendlich häufiger Wiederholung landet der Würfel in 1 von 6 Fällen auf der 1

Unfairer Würfel

- "Eine 1, 2 oder 3 wird durchschnittlich in sieben von zehn Fällen geworfen"
 $\leftarrow P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\})$
 $P(\{1, 2, 3\}) = \frac{7}{10}$
- "Die 4, 5 und 6 sind gleich wahrscheinlich."
 $\leftarrow P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\})$
 $P(\{2\}) + P(\{1\}) = P(\{1, 2\}) = \frac{6}{10}$
- "Die 1 oder 2 fällt in 6 von 10 Fällen"
- "Die 1 ist doppelt so wahrscheinlich wie die zwei."
 $P(\{1\}) = 2P(\{2\})$

Es hilft über Ereignisse nachzudenken.

Grundmenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $\leftarrow$ alle möglichen Ergebnisse

Ereignissystem/
Ereignisalgebra:

$$\Sigma = \{ \{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}, \\ \{1,2\}, \{1,3\}, \\ \{1,4\}, \dots, \{5,6\}, \\ \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \dots, \\ \Omega, \emptyset \}$$

$$= \mathcal{P}(\Omega) := \{U \mid U \subset \Omega\}$$

↑
"Potenzmenge"

Wahrscheinlichkeitsmaß: $P: \Sigma \rightarrow [0,1]$

$f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ "Wertebereich"

Funktion: $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$

$f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \tan(x)$

↑
"Definitionsbereich"

$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \exp(x)$

$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ $f(x) = \cos(x)$

"Funktionsvorschriften"
_1

Lösung unfairen Würfels:

$$1. P(\{13\}) + P(\{23\}) + P(\{33\}) = \frac{7}{10}$$

$$2. P(\{43\}) = P(\{53\}) = P(\{63\})$$

$$3. P(\{13\}) + P(\{23\}) = \frac{6}{10}$$

$$4. P(\{13\}) = 2 \cdot P(\{23\})$$

$$3. \text{ in 1. einsetzen: } \frac{6}{10} + P(\{33\}) = \frac{7}{10}$$

$$\Rightarrow P(\{33\}) = \frac{1}{10}$$

$$4. \text{ in 3. einsetzen: } 2P(\{23\}) + P(\{23\}) = \frac{6}{10}$$

$$\Rightarrow 3P(\{23\}) = \frac{6}{10} \Rightarrow P(\{23\}) = \frac{2}{10}$$

$$\stackrel{1.}{=} \frac{7}{10}$$

$$\Rightarrow P(\{13\}) = \frac{4}{10}$$

$$P(\Omega) = 1 = \underbrace{P(\{13\}) + P(\{23\}) + P(\{33\})}_{\substack{1. \\ = \frac{7}{10}}} + P(\{43\}) + P(\{53\}) + P(\{63\})$$

$$\Rightarrow P(\{43\}) + P(\{53\}) + P(\{63\}) = \frac{3}{10}$$

$$\stackrel{2.}{\Rightarrow} P(\{43\}) = P(\{53\}) = P(\{63\}) = \frac{1}{10}$$

Definition P ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß,
wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $P(\Omega) = 1$ ($\leadsto P(\emptyset) = 0$)
- Für zwei Ereignisse $A, B \in \Sigma$
mit $A \cap B = \emptyset$ gilt: $\emptyset = \Sigma$
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

"Definition durch Beispiel":

$$A = \{1, 2\} \quad \text{und} \quad B = \{2, 3\}$$

$$A \cap B = \{2\} \quad \text{und} \quad A \cup B = \{1, 2, 3\}$$

"Angenommen es wird eine 1, 2 oder 3
gewürfelt, wie wahrscheinlich ist es, dass
der Würfel 1 zeigt?"

$$P(\{1, 2, 3\}) = \frac{3}{10}, \quad P(\{1\}) = \frac{1}{10}$$

$$P(\{13\} | \{1,2,3\}) = \frac{P(\{13\})}{P(\{1,2,3\})} = \frac{4}{7}$$

↗
"bedingt auf das
Ereignis..."

$$P(\{13\}) = P(\{13\} | \{1,2,3\}) \cdot P(\{1,2,3\})$$

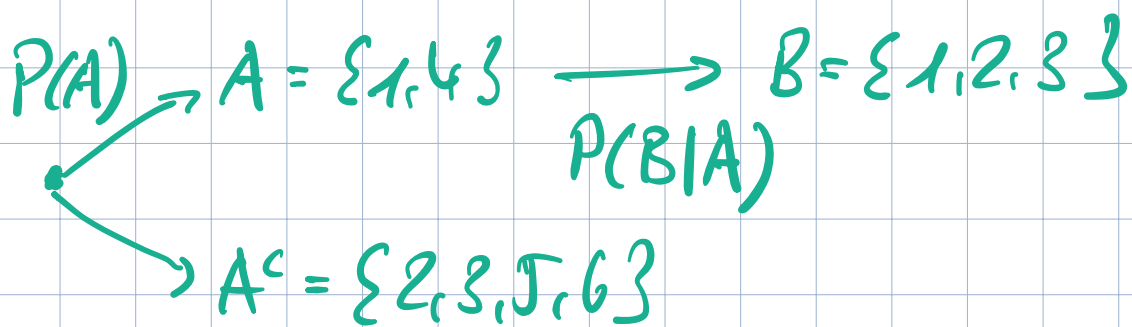
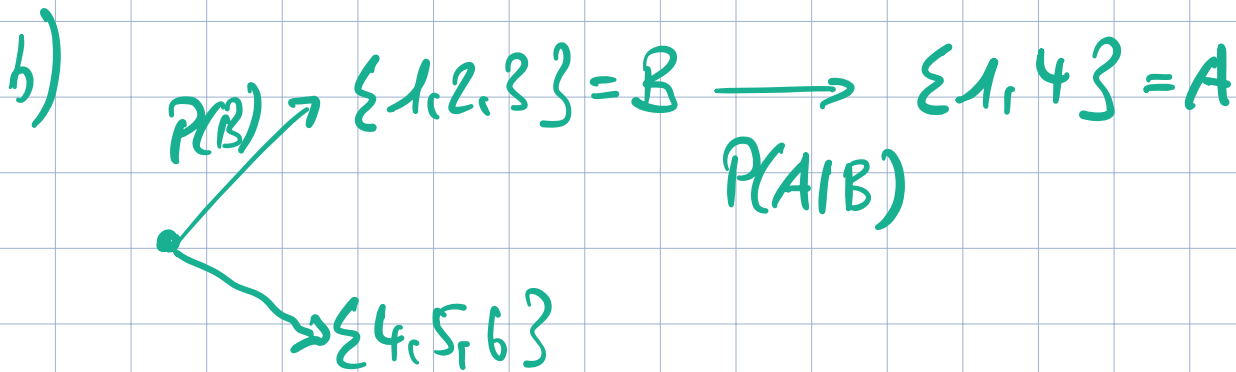
Definition Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignis $A \in \Sigma$ bedingt auf ein Ereignis $B \in \Sigma$ ist gegeben durch

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(" $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$ ")

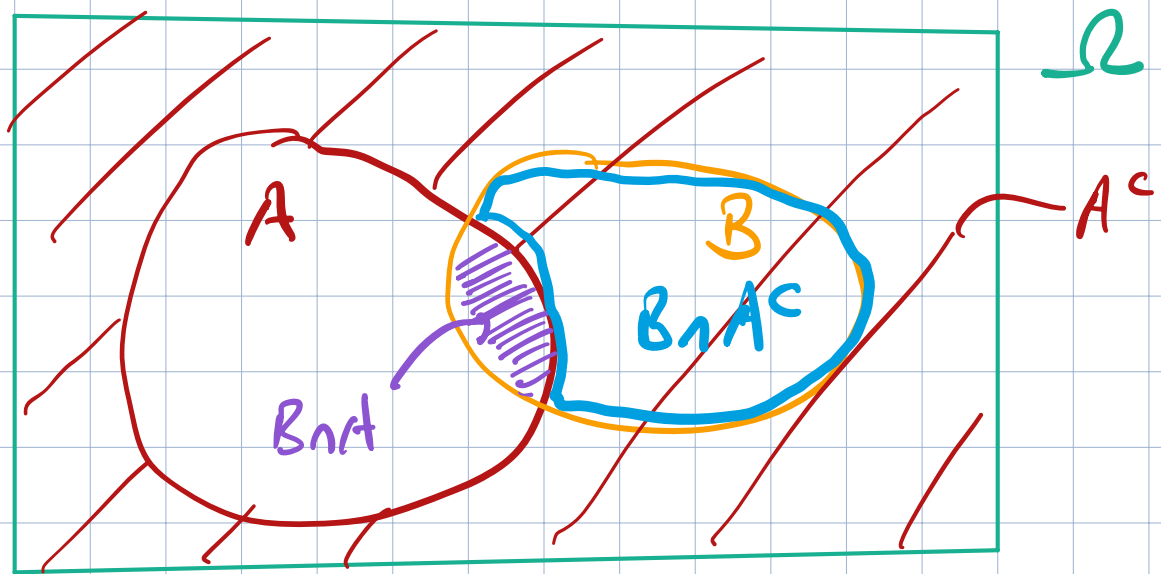
Aufgabe 1: z.z.: $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow P(A|B) \cdot P(B) &= P(B|A) \cdot P(A) \\
 &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\
 &= P(A \cap B) = P(A \cap B)
 \end{aligned}$$



Fortsetzung folgt

c) z.z.: $P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c) = (*)$



"Venn-Diagramm"

$$\textcircled{*} = \frac{P(B \cap A)}{\cancel{P(A)}} \cdot \cancel{P(A)} + \frac{P(B \cap A^c)}{\cancel{P(A^c)}} \cdot \cancel{P(A^c)}$$

$$= P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$$

$$= P((B \cap A) \cup (B \cap A^c)) = P(B)$$

Aufgabe 2: $\Omega = \{(\text{krank}, +), (\text{krank}, -),$
 $(\text{ges.}, +), (\text{ges.}, -)\}$

$$\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$$

$K = \text{"Person ist krank"}; T = \text{"Test positiv"}$
 $= \{(\text{krank}, +), (\text{krank}, -)\}; = \{(\text{ges.}, +),$
 $(\text{krank}, +)\}$

$$P(K) = 0.002$$

$$P(T|K) = 0.99$$

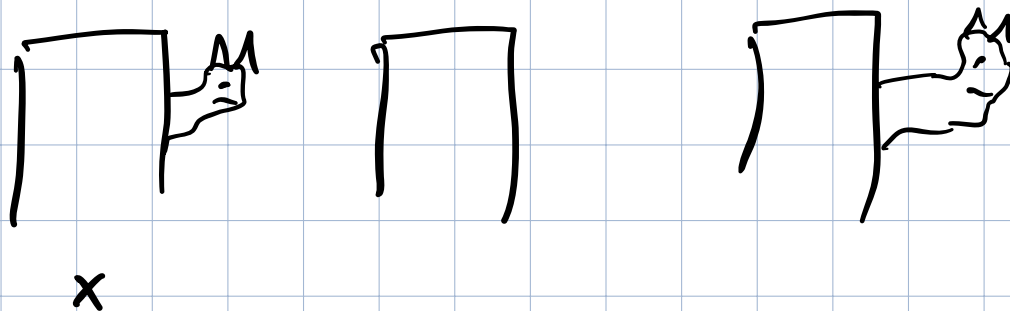
$$P(T|K^c) = 0.02 \quad \leadsto (\Omega, \Sigma, P) \text{ ist der gesuchte W'keitraum}$$

$$b) P(K|T) = \frac{P(T|K) P(K)}{P(T)} = (*)$$

$$\begin{aligned} P(T) &\stackrel{1c}{=} P(T|K) P(K) + P(T|K^c) P(K^c) \\ &= 0.99 \cdot 0.002 + 0.02 \cdot 0.998 = 0.022 \end{aligned}$$

$$(*) = 0.090 \approx 9\%$$

Aufgabe 3: "Monty - Hall Problem"



$$a) \Omega = \{1, 2, 5\} \times \{1, 2, 3\}$$

$$= \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) \}$$

$$\Sigma = \mathcal{P}(\Omega) \quad P(d, c) = \frac{1}{9}$$

Ereignis $T = \{ (d, c) \in \Omega \mid d = c \}$
 $= \{ (1,1), (2,2), (3,3) \}$

$$P(T) = P((1,1)) + P((2,2)) + P((3,3)) /$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(T^c) = \frac{2}{3} \quad (= 1 - P(T))$$

1. Strategie: Wechselt nicht

$$P(\text{Gewinn}_1) = P(T) = \frac{1}{3}$$

2. Strategie $P(\text{Gewinn}_2) = P(T^c) = \frac{2}{3}$

Frequentistisch / "Klassisch"

- Vorstellung: Wahrscheinlichkeiten über (zumindest in Gedankenexperimenten) beliebig oft wiederholbare Zufallsexperimente verstanden

Bayes

- Wahrscheinlichkeiten als subjektive Größe für Plausibilität / Glaubwürdigkeit

$$\text{" } P(\text{Modell} | \text{Daten}) = \frac{P(\text{Daten} | \text{Modell}) \cdot P(\text{Modell})}{P(\text{Daten})} \text{" }$$

a posteriori
a priori