5 Natürliche Einheiten

Im Folgenden wollen wir uns anhand einiger alltagsnaher Überlegungen dem (zugegebenermaßen anfangs eher unbequemen) Thema der natürlichen Einheiten widmen. Früher oder später lernen jedoch alle im Rahmen eines Physikstudiums, dass sich das anfängliche Leiden, gepaart mit einiger Verwirrung, sich dann doch auszahlt. Das wollen wir nun auch nachempfinden. Also los!

5.1 Länge und Zeit

Dortmund und Aachen sind 2h voneinander entfernt. Dieser Satz ergibt keinen Sinn. Dortmund und Aachen sind zwei Städte in Deutschland. Wie können zwei Städte, zwei Punkte im geometrischen Raum, ein Zeitintervall voneinander entfernt sein? Städte sind doch eigentlich nur räumlich voneinander entfernt? Hat das schon etwas mit Raumzeit zu tun?

Natürlich *nicht*. Wenn wir sagen, dass Dortmund und Aachen 2h voneinander entfernt sind, meinen wir *eigentlich*, dass es mit dem Auto 2h dauert um von der einen in die andere Stadt zu fahren. Was hier nach einem No-brainer klingt, ist eigentlich eine ganz schön verblüffende Erkenntnis: Haben wir eine Referenzgeschwindigkeit und sind wir uns alle über diese Referenzgeschwindigkeit einig (im Beispiel: dass ein Auto im Schnitt 100 km/h zurücklegt), werden auf einmal Längendifferenzen und Zeitintervalle die gleiche Größe; oder zumindest können wir beide Angaben äquivalent zueinander verstehen:

$$2\,\mathrm{h} = 200\,\mathrm{km}\,. \tag{5.1}$$

Was hier wie eine üble Missachtung der Mathematik aussieht, ist eigentlich gar kein Problem, solange wir die obige Gleichung nicht etwa als $2 = 200$ oder $1\,\mathrm{h} = 1\,\mathrm{km}$ falsch verstehen: Nur weil ein Auto ca. 100 km/h zurücklegt, heißt das noch nicht, dass Stunden und Kilometer das Gleiche sind oder wir Probleme beim Zählen bekommen. Es bedeutet doch lediglich, dass wir von nun an auch ganz andere Entfernungen mit Zeitintervallen angeben können.

Widmen wir uns nun zum Beispiel der Frage, wie weit die Sonne von der Erde entfernt ist. Schlagen wir dies bei Wikipedia nach, bekommen wir prompt die folgende Antwort: $d_{\mathrm{SE}} = 149,597,870\,\mathrm{km}$. Nun ist es nicht unbedingt die *natürlichste* Art der Fortbewegung mit dem Auto zur Sonne zu fahren. (Würde man es dennoch tun, würde man eine mäßig interessante zeitliche Entfernung von $\Delta t_{\mathrm{SE}} = 149,597,870\,\mathrm{km} = 149,599\,\mathrm{h}$ erhalten.)

Nun ist es so, dass die Sonne vor allem[1] Licht produziert, durch welches wir sie dann beobachten können. Und da wir uns nicht mit Autos durch den Weltraum bewegen, ist es hier eine deutlich *natürlichere* Einheit, die Lichtgeschwindigkeit

$$c = 299,792.458\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \tag{5.2}$$

als allgemein akzeptierte Geschwindigkeit der Fortbewegung zu wählen. Tatsächlich ist es eine fundamentale Annahme, dass die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum an jedem Ort und zu jeder Zeit immer den gleichen Wert hat; anders also als jedes Auto. Ohne diese Annahme, würde die Allgemeine Relativitätstheorie nicht funktionieren. Die folgende Rechnung ist also, wenn man so will, *natürlich*: Nutzen wir diese Naturkonstante als Umrechnungsfaktor, erhalten wir

$$d_{\mathrm{SE}} = 149,597,870\,\mathrm{km} = 149,597,870\,\mathrm{km} = 499\,\mathrm{s} = 8\,\mathrm{min}\,19\mathrm{s}\,. \tag{5.3}$$

Diese Zahl ist doch sogar ganz handlich! Das Licht braucht also knapp acht Minuten von der Sonne bis zu uns. Anders ausgedrückt: Die Sonne ist acht Lichtminuten von uns entfernt.

Nochmal ganz langsam! Was ist denn hier passiert? Wie kann denn mathematisch $149\,597\,870\,\mathrm{km} = 499\,\mathrm{s}$ hinhauen? Die Antwort ist eigentlich ganz einfach: Behandeln wir

[1] Sie strahlt auch eine gigantische Menge Neutrinos ab – mehr sogar eigentlich noch als Photonen, also Lichtteilchen. Doch dazu ein andermal.

die Einheiten hinter den Zahlen als Variablen, können wir diese nach Belieben algebraisch manipulieren. Versuchen wir es einmal an dem gegebenen Beispiel:

$$149,597,870\,\mathrm{km} = 499\,\mathrm{s} \tag{5.4}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{149,597,870}{499}\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = 1 \tag{5.5}$$
$$\Leftrightarrow \quad 299,792.458\,\mathrm{km/s} = 1 \tag{5.6}$$
$$\Leftrightarrow \quad c = 1 \tag{5.7}$$

Wow! Da steht nun ganz eindeutig dass $c = 1$ gilt.

Wem sich bei diesem Anblick zunächst einmal der Magen umdreht: Seid beruhigt. Ihr seid in guter Gesellschaft. Dieses Ergebnis zu akzeptieren (und vielmehr: es zu benutzen) braucht ein wenig Zeit. Im Physikstudium wird man mit diesem Ergebnis erst im fünften Semester konfrontiert, wenn man sich in der theoretischen Physik spezialisiert. Spätestens ab dem sechsten Semester dann hat man allerdings auch schon vergessen, welchen Wert die Lichtgeschwindigkeit c denn "eigentlich" im SI-Einheitensystem in den Einheiten km/s hatte.

Warum das? Bisher haben wir doch im Prinzip nur gesagt, dass das Licht acht Minuten von der Sonne bis zu uns benötigt? Stimmt. Bisher steht hier noch nichts besonders magisches. Lassen wir uns aber noch einen Moment länger auf die Konsequenzen von $c = 1$ ein. Wir können nun nicht nur den Abstand der Erde zur Sonne, sondern jeden beliebigen Abstand in Zeit-Einheiten angeben. Was wäre denn beispielsweise ein Meter in Sekunden?

$$c = \frac{299,792.458\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{s}} = \frac{299,792,458\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} \tag{5.8}$$
$$\Leftrightarrow \quad 299,792,458\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{s} \tag{5.9}$$
$$\Leftrightarrow \quad 1\,\mathrm{m} = \frac{1\,\mathrm{s}}{299,792,458} = 3.3\,\mathrm{ns} \tag{5.10}$$

Ein Meter ist also in dem von $c = 1$ definierten Einheitensystem das Gleiche wie drei Nanosekunden. Wir können dies wieder physikalisch interpretieren: Das Licht benötigt drei Nanosekunden um eine Strecke von einem Meter zu durchqueren. Technisch gesehen ist es nun absolut korrekt zu sagen: „*Wow, Simon! Was haben dir deine Eltern nur zu Essen gegeben. Du bist fast sieben Nanosekunden groß!*“.

5.2 Energie und Frequenz

Der tiefere Sinn dieses Einheitensystems kann sich einem nur ganz erschließen, wenn nicht nur eine (hier gewissermaßen willkürlich ausgewählte) Naturkonstante mathematisch auf 1 gesetzt wird. Gehen wir mal einen Schritt weiter (sind wir abenteuerlustig!) und setzen wir auch das allseits beliebte reduzierte Planck'sche Wirkungsquantum[2] $\hbar = 1$. Schauen wir auch hier wieder einmal auf Wikipedia nach: Dort finden wir[3]

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054,571,82 \times 10^{-34}\,\frac{\mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} = 1.054,571,82 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}\,. \tag{5.11}$$

[2] Solltest du noch nie etwas von dieser Naturkonstante gehört haben: Gar kein Problem. An dieser Stelle sei nur gesagt, dass sie die fundamentale Größe der Quantenmechanik ist. Weil sie so klein ist, spielt Quantenmechanik in unserer Erfahrungswelt des Alltags keine Rolle. Wäre $\hbar$ größer, würden wir womöglich auch durch Wände tunneln können... Also angenommen, die Atome und Moleküle aus denen wir bestehen, würden immer noch stabil sein und sich nicht einfach in nullkommanichts in „Luft“ auflösen.

[3] Warum ist ein Joule das gleiche wie $1\,\mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}^2$? Schaue dir dafür z.B. einmal an, welche Energie $E = F \cdot d$ benötigt wird um eine Masse mit einer Kraft von $F = 1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\,m/s}^2$ um $d = 1\,\mathrm{m}$ fortzubewegen. Warum ist ein Newton das Gleiche wie $1\,\mathrm{kg\,m/s}^2$? Nimm dir dafür $F = m \cdot a$ zu Herzen und wähle eine Testmasse von einem Kilogramm und eine Beschleunigung von $1\,\mathrm{m/s}^2$.

Setzen wir nun das Planck'sche Wirkungsquantum auf 1, folgen daraus

$$1\,\mathrm{J} = \frac{1}{1.054,571,82 \times 10^{-34}\,\mathrm{s}} = 9.5 \times 10^{-35}\,\mathrm{s}^{-1} = 9.5 \times 10^{33}\,\mathrm{Hz} \tag{5.12}$$

und

$$1\,\mathrm{s} = \frac{1}{1.054,571,82 \times 10^{-34}\,\mathrm{J}} = 9.5 \times 10^{33}\,\mathrm{J}^{-1}\,. \tag{5.13}$$

Handelsübliche Energien entsprechen also gigantisch hohen Frequenzen. Um bei gewöhnlichen Frequenzen zu landen (sagen wir: Wie wir sie vom Radiohören können, irgendwas mit Gigahertz) brauchen wir also sehr sehr kleine Energien.

Vielleicht kommt dir die folgende Energieeinheit bekannt vor:

$$1\,\mathrm{eV} = 1.602,176,634 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}\,. \tag{5.14}$$

Das ist die Energiemenge, die nötig ist um ein Elektron eine Potentialdifferenz von einem Volt heraufzubewegen (daher der Name: *ein Elektronenvolt*). Die Skala die diese Energie angibt ist die Skala, auf der die Quantenmechanik relevant ist: Als Vergleich dient hier zum Beispiel auch die Energie $E_{\mathrm{Ryd}} = 13.6\,\mathrm{eV}$, die ein Elektron in der „untersten Schale" im Wasserstoffatom besitzt, wenn man dem Bohrschen Atommodel folgt. Diese Energiemenge wird auch also Rydberg-Energie bezeichnet.

Nutzen wir nun einmal die in der Quantenmechanik etwas handlichere Einheit Elektronenvolt um die Konsequenzen von $\hbar = 1$ zu verdeutlichen:

$$\hbar = 1.054,571,82 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js} = 6.582,119,569 \times 10^{-16}\,\mathrm{eV\,s}\,. \tag{5.15}$$

Daraus können wir nun direkt

$$1\,\mathrm{eV} = \frac{1}{6.582,119,569 \times 10^{-16}\,\mathrm{s}} = 1.52 \times 10^{15}\,\mathrm{Hz} = 1.52\,\mathrm{THz}\,, \tag{5.16}$$

und

$$1\,\mathrm{eV}^{-1} = 6.582,119,569 \times 10^{-16}\,\mathrm{s} = 0.658\,\mathrm{fs} \tag{5.17}$$

ableiten. Eine physikalische Interpretation dessen wird zum Beispiel durch die Heisenberg'sche Energie-Zeit-Unschärferelation $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$ möglich: Im Vakuum treten ständig Quantenfluktuationen auf. Eine Energie-Fluktuation in Höhe von 1eV wird dabei maximal auf der Femtosekunden-Skala auftreten. Größere Energiefluktuationen sind dementsprechend noch deutlich kurzlebiger. Gleichzeitig können wir auch die Wellenlänge der emittierten Photonen bei Übergängen im Wasserstoffatom berechnen: Die dadurch freigesetzten Energien sind auf der 10 eV-Skala und die freigesetzte Strahlung ist im 10 THz-Bereich. Wenn wir diese Strahlung messen wollen, müssen wir also einen Detektor bauen, der elektromagnetische Strahlung bei solch hohen Frequenzen messen kann.

Cool! Nur durch das Setzen von $\hbar = 1$ haben wir jetzt schon tiefe Einblicke in die Skala bekommen, auf der sich die Quantenmechanik abspielt und mit welcher Art von Experiment wir ihre Vorhersagen überprüfen können. Aber lasst uns doch noch einen Schritt weiter gehen. Was passiert, wenn wir nun $c = \hbar = 1$ setzen? Das sieht noch einmal verrückter aus als das, was wir bisher schon gemacht haben, aber gehen wir systematisch an die Sache heran: $c = 1$ hatte eigentlich nur zur Folge, dass Zeiten und Längen mathematisch die gleiche „Dimension" angeben. Die Gleichung $\hbar = 1$ hatte zur Folge, dass Zeiten und (inverse) Energien die gleiche Dimension angeben. Kombinieren wir beides miteinander, können wir nun Längen mit (inversen) Energie-Einheiten beschreiben!

Im Beispiel von oben bedeutet das ganz plastisch

$$E_{\mathrm{Ryd}} = 13.6\,\mathrm{eV} = 20.6\,\mathrm{THz} = \frac{1}{14.55\,\mathrm{nm}}\,. \tag{5.18}$$

Wir bekommen also das Ergebnis, dass die elektromagnetische Strahlung bei Übergängen im Wasserstoffatom irgendwie mit der 10 nm-Skala zusammenhängt. Eine weitere schnelle Wikipedia-Suche später stellen wir fest, dass das die Wellenlänge von Licht im ultravioletten Bereich, kurz unterhalb des sichtbaren Spektrums ist. Wow! Wir haben bisher noch kein Naturgesetz benutzt und doch wissen wir schon, dass wir irgendeine Art von Effekt mit UV-Licht erwarten können. *Es ist und bleibt magisch.*

5.3 Temperatur und Energie

In der theoretischen Hochenergie-Physik und Kosmologie wird standardmäßig ein Einheitensystem benutzt, das sich *natürliche Einheiten* nennt und durch das Gleichsetzen von

$$c = \hbar = k_{\mathrm{B}} = 1 \tag{5.19}$$

definitert ist. Die letzte Naturkonstante darin ist die Boltzmann-Konstante

$$k_{\mathrm{B}} = 1.381 \times 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} = 86.17\,\frac{\mathrm{\mu eV}}{\mathrm{K}}\,, \tag{5.20}$$

welche es erlaubt die mittlere thermische Energie eines Teilchens in einem Gas (oder eben dem primordialen Plasma aus Elementarteilchen) zu berechnen. Über den Daumen gilt $E_{\mathrm{therm}} \simeq k_{\mathrm{B}}\,T$, wobei T die Temperatur des Gases beschreibt[4]. Bei Raumtemperatur finden wir also, dass ein Teilchen eine thermische Energie von ca. $293\,\mathrm{K} \approx 25\,\mathrm{meV}$ besitzt. Wild. Und ganz schön wenig kinetische Energie, siehe zum Beispiel die obige Umrechnung von Joule in eV.

Aber es wird noch wilder! Dadurch, dass wir aus der Gleichung

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{Nm} = 1\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\mathrm{m} = 1\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \tag{5.21}$$

gewissermaßen den Meter-pro-Sekunde-Bruch rauskürzen können, weil ja $c \approx 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} = 1$, finden wir

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{1}{c^2} = 1\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\frac{\mathrm{s}^2}{2.997^2 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}^2} = 1.113 \times 10^{-17}\,\mathrm{kg}\,. \tag{5.22}$$

Energie und Masse *sind* das gleiche! Das erinnert natürlich schon sehr an Einstein's berühmte Gleichung $E = mc^2$.

5.4 Energie als universelle Einheit

Durch die Kombination dieser drei Naturkonstanten können wir nach ein bisschen Algebra die Umrechnungsfaktoren in Tabelle 5.1 herleiten.

[4]Wenn man es ganz genau nimmt, gilt $E_{\mathrm{therm}} = \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}\,T$ für ein monoatomares Gas im dreidimensionalen Raum. Bei mehr Freiheitsgraden wird der Faktor 3/2 entsprechend größer.

Größe	Einheit (geschrieben)	Wert in SI-Einheiten
Energie	1 eV	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J
Länge	$\frac{1}{1\ \text{eV}}$	$1{,}973 \cdot 10^{-7}$ m
Zeit	$\frac{1}{1\ \text{eV}}$	$6{,}582 \cdot 10^{-16}$ s
Masse	1 eV	$1{,}783 \cdot 10^{-36}$ kg
Dichte	$1\ \text{eV}^4$	$2{,}320 \cdot 10^{-16}$ kg/m^3
Impuls	1 eV	$5{,}344 \cdot 10^{-28}$ N $\cdot$ s
Temperatur	1 eV	$1{,}160 \cdot 10^4$ K

Tabelle 5.1: Umrechnungsfaktoren für die wichtigsten physikalischen Größen zwischen natürlichen Einheiten ($c = \hbar = k_B = 1$, Basiseinheit eV) und SI-Einheiten.

Aufgabe 5.1

Das Newtonsche Gravitationsgesetz lautet

$$F_G = G_\mathrm{N} \frac{mM}{r^2} ,$$

wobei

$$G_\mathrm{N} = 6.67 \cdot 10^{-11} \, \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$$

die Gravitationskonstante ist. In unseren natürlichen Einheiten mit $c = k_\mathrm{B} = \hbar = 1$ gilt ferner (vgl. Tabelle 5.1)

$$1\,\mathrm{eV} = 1.16 \cdot 10^4\,\mathrm{K} = 1.8 \cdot 10^{-36}\,\mathrm{kg} = 1.5 \cdot 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1} = 5.1 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^{-1} \,.$$

a) Gib G_N in natürlichen Einheiten an. „In natürlichen Einheiten“ heißt „in Einheiten von eV^α“, wobei der Exponent α zunächst zu bestimmen ist. Mache dir dazu klar, dass $c = 1$ bewirkt, dass Längen und Zeiten in denselben Einheiten angegeben werden können, sodass $\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\,s}^2)$ gewissermaßen um $\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$ gekürzt werden kann (unter Berücksichtigung des nötigen Faktors). Setze dann für die verbliebenen SI-Einheiten die entsprechenden Werte in natürlichen Einheiten ein.

b) Welchen Wert hat $1/\sqrt{G_\mathrm{N}}$ in natürlichen Einheiten?

c) Oh nein! Ein Tornado ist durch die Planck-Skala gewirbelt. :(Dadurch ist in der folgenden Tabelle die Zuordnung zwischen Zahlenwerten und dazugehörigen SI-Einheiten durcheinandergekommen. Ordne die folgenden Zahlenwerte den Planck-Einheiten der linken Spalte zu:

$$5.4 \cdot 10^{-44}, \quad 2.2 \cdot 10^{-8}, \quad 1.6 \cdot 10^{-35}, \quad 1.5 \cdot 10^{32}.$$

Planck-Einheit	Zahlenwert	Einheit
M_Pl		kg
T_Pl		K
L_Pl		m
t_Pl		s

Die Planck-Skala beschreibt die minimale Längen- und Zeitskala sowie die maximale Energie-, Massen- und Temperaturskala, bis zu der wir Allgemeine Relativitätstheorie und Quantenfeldtheorie als separate Theorien verstehen können. Unsere Naturgesetze lassen sich demnach erst auf Zeitskalen, die deutlich größer als eine Planck-Zeit t_Pl (z.B. nach der Anfangssingularität), sicher anwenden.